Einschub: Erste & zweite Variation des Längenfunktionals: (A)

$\gamma : [a,b] \longrightarrow M$; $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$

<u>Variation der Kurve</u> γ: $C : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \longrightarrow M$ glatt.

$C(s,t) = \gamma_s(t)$; $C(0,t) = \gamma(t)$.

$T := C_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ $\quad V := C_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ $\quad T = T(s,t)$, $V = V(s,t)$

<u>Erste Variation des Längenfunktionals</u> Sei $\gamma = \gamma_0$ nach Bogenlänge parametrisiert.

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s) = -\int_a^b \langle V, \nabla_T T \rangle dt + \underbrace{\langle V, T \rangle \Big|_a^b}_{= \langle V \circ \gamma_s, T \circ \gamma_s \rangle |_a^b}$$

<u>Beweis:</u>

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{|T|} \cdot \frac{d}{ds} \langle T, T \rangle \, dt \qquad \nabla_s T - \nabla_t V = [T,V] = \alpha_*\left[\tfrac{\partial}{\partial t}, \tfrac{\partial}{\partial s}\right] = 0.$$

$$\overset{|T|=1}{=} \frac{1}{2} \int_a^b 2 \langle \nabla_s T, T \rangle = \int_a^b \langle \nabla_t V, T \rangle \, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \langle V, T \rangle \, dt - \int_a^b \langle V, \nabla_t T \rangle dt$$

$$= \langle V, T \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle V, \nabla_t T \rangle dt \qquad \square$$

<u>Bem:</u> γ Geodätische : $\frac{d}{ds} L(\gamma_s) = \langle V, T \rangle \Big|_a^b$.

<u>Zweite Variation des Längenfunktionals</u>

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) = \int_a^b \left(|\nabla_t V|^2 - \langle T, \nabla_t V \rangle^2 + \langle R(V,T)T, V \rangle \right) dt$$

Ist c eine Variation von Geodätischen, d.h. c_s ist Geodätische für jedes s, dann erfüllt V folgende Gleichung: (B)

$$\nabla_t^2 V = R(T,V)T \qquad (*)$$

Ist $\nabla_t T = 0$ (beachte $(\nabla_t T)(s,t)$) so gilt:

$$0 = \nabla_s \nabla_t T = \nabla_t \nabla_s T - R(T,J)J = \nabla_t^2 V - R(T,J)J$$

eingesetzt in die zweite Variation ergibt zunächst für den Integranden

$$|\nabla_t V|^2 - \langle T, \nabla_t V\rangle^2 + \langle R(V,T)T, V\rangle$$

$$= |\nabla_t V|^2 - \langle T, \nabla_t V\rangle^2 + \langle \nabla_t^2 V, V\rangle = \frac{d}{dt}\langle \nabla_t V, V\rangle - \Big[\underbrace{\frac{d}{dt}\langle T, V\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \nabla_t T, V\rangle}_{=0}\Big]^2$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} L(\gamma_s) = \langle \nabla_t V, V\rangle\Big|_a^b$$ falls Anfangspunkt fest in der Variation gilt $\nabla_t V(a) = 0$

$$= \langle \nabla_t V(b), V(b)\rangle.$$

Bem: Ein Jacobi Feld entlang einer Kurve ist eindeutig bestimmt durch $V(0)$, $\nabla_t V(0)$ weil $(*)$ DGL 2-ter Ordnung & ist $V(0)$ normal zu $T(0)$ so ist $V \perp T$.

Wähle paralle VF e_i entlang γ.

Der Laplace Operator in radialen Koordinaten

(M,g) Riemannsche Mf; $f \in C^\infty(B(m,\varepsilon))$ $m \in M$, $\varepsilon > 0$. $d := \dim M$

ε sei so gewählt, dass $\exp_m : T_mM \to B(m,\varepsilon)$ ein Diffeo wird. (genauer $\exp_m : U \to B(m,\varepsilon)$ wo $U \subset T_mM$ eine geeignete Umgebung der $0 \in T_mM$ ist)

Ferner sei f gegeben als

$$f = \varphi \circ d(m,\cdot)$$

wo $\varphi : [0,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist. D.h. f hängt nur vom Abstand zu m ab.

Sei

$$\mathrm{Vol}_{\exp_m^*(g)} = \theta \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d \quad ,$$

$\theta = \sqrt{\det g_{ij}}$

(b_i)

falls Basis in T_mM gewählt wird und $\partial_i := d(\exp_m)(b_i)$ und $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$

das induzierte Volumenelement auf $U \subset T_mM$.

Es bezeichne für $n \in B(\varepsilon, m)$

nach Bogenlängeparam.

$$\theta'(n) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=r} \theta(\gamma(s)) \quad \text{wo } \gamma : [0,r] \to M \text{ eind. Geodäte von } m \text{ nach } n$$

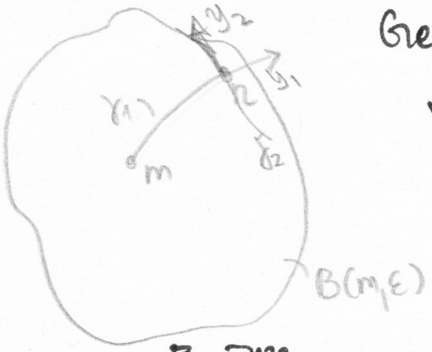
und $r = d(m,n)$

Es gilt dann:

$$\Delta f = -\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r}\right)$$

auf $B(m,\varepsilon) \setminus \{m\}$ (dort ist Δf nicht definiert)

<u>Beweis</u>: Sei $n \in B(m,\varepsilon)\setminus\{m\}$. Dann ex. eine eind.



Geodätische $\gamma : [0,r] \to B(m,\varepsilon)$ mit

$\gamma(0) = m$, $\gamma(r) = n$. Setze

$$y_1 := \frac{d\gamma}{ds}(r) = \gamma'(r)$$

- ~~Setze~~ Ergänze $y_1 \in T_nM$ zu einer ONB $y_1, y_2, \dots, y_d \in T_nM$.
- Seien $\gamma_2, \dots, \gamma_d$ Geodätische mit $\gamma_i(0) = n$ und $\gamma_i'(0) = y_i$ $i \geq 2$.
- Nach Vorlesung:

$$\Delta f(n) = -\frac{d^2}{ds^2}(f\circ\gamma)(r) - \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2}{d\alpha}(f\circ\gamma_i)(0)$$

- Es gilt: $-\frac{d^2}{ds^2}(f\circ\gamma)(r) = -\frac{d^2}{ds^2}\varphi\,(r)$, da $d(m,\gamma(s)) = s$ ist.
- Es existiert eine Familie von Geodätischen C_α mit

$C_0 = \gamma_1$; $\frac{d}{d\alpha}C_\alpha(0) = y_i$; $\left(C_\alpha(r) = \gamma_i(\alpha)\right)$

$w_0 := \left[d(\exp_m)\right]^{-1}(y_i)$

z.B. ist $v_0 := \exp_m^{-1}(n)$

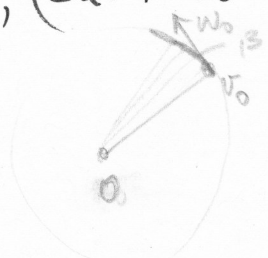
Betrachte $S_\varrho^{d-1}(v_0)$ $\varrho := |w_0|$

und den Großkreis an

v_0 und $w_0 \in T_{v_0}T_mM \cong T_mM$

$C_\alpha(s) = \exp_m(s\beta(\alpha))$

<u>Gauß-Lemma</u>: $\exp_m^*(g)(v_0, w_0) = 0$.



- Damit gilt: $(f\circ\gamma_i)(\alpha) = \varphi(L(C_\alpha))$

wobei $L(C_\alpha)$ die Länge von C_α bezeichnet.

[N.B. Man hätte wohl γ_i gleich durch $C_i(\alpha, s) = \exp_m\left(\frac{s}{r}\cdot\beta_i(\alpha)\right)$ definieren können!
$(\gamma_i = C_i(\alpha, 1))$

- Folglich: $\frac{d}{d\alpha}(f\circ\gamma_i)(\alpha) = \frac{d\varphi}{ds}(L(C_\alpha)) \cdot \frac{d}{d\alpha}L(C_\alpha)$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(f\circ\gamma_i\right)(\alpha) = \frac{d^2\varphi}{ds^2}(L(C_\alpha))\left(\frac{d}{d\alpha}L(C_\alpha)\right)^2 + \frac{d\varphi}{ds}(L(C_\alpha))\cdot\frac{d^2}{d\alpha^2}L(C_\alpha)$$

<u>Beachte</u>: $Y_i(s) := C_*\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)(0,s)$ ist Jacobi-Feld weil C Variation dch. Geodätischen!

- $\frac{d}{d\alpha} L(C_\alpha) = \langle Y_i(r), y_1 \rangle$ (nach Einschub)

$$= \langle y_i, y_1 \rangle = 0 \quad i \geq 2.$$

- $\frac{d^2}{d\alpha^2} L(C_\alpha) = \cancel{\quad} \langle Y_i, \nabla_t Y_i \rangle \Big|_0^r$

$$= \langle Y_i(r), Y_i'(r) \rangle \text{ mit } Y_i' = \nabla_t Y_i$$

$Y_i(0) = 0$, da Variation mit festem Anfangspunkt.

- Also:

$$\Delta f(n) = -\frac{d^2}{ds^2}\varphi(r) - \frac{d\varphi}{ds}(r) \sum_{i=2}^{d} \langle Y_i(r), Y_i'(r) \rangle.$$

$Y = (\langle Y_i, Y_j \rangle)_{ij}$ mit $\boxed{Y_1 = \dot{\gamma}}$

Motivation für das Folgende: $\sum \langle Y_i, Y_i' \rangle$ ist die Ableitung $\frac{d}{ds}\Big|_{s=r} \sqrt{\det Y}$

$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=r} \mathrm{vol}_g(Y_1(s), \dots, Y_d(s))$

E_d Einheitsmatrix

- Es gilt: $$\frac{d}{ds}\Big|_{s=r} \sqrt{\det Y} = \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{\det Y(r)}}_{=1}} \cdot \overbrace{\det(Y(r))}^{=1} \cdot \mathrm{tr}(\underbrace{Y^{-1}(r)}_{= E_d} \dot{Y}(r)) = \sum_{i=2}^{d} \langle Y_i, Y_i' \rangle (r)$$

da $(Y_i(r))_{i=1,\dots,d}$ ONB!

weil

~~und~~ $\dot{Y}(r) = \left(\langle Y_i'(r), Y_j(r) \rangle + \langle Y_i(r), Y_j'(r) \rangle \right)_{ij} \Rightarrow \mathrm{tr}(\dot{Y}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{d} \langle Y_i, Y_i' \rangle$

$$\boxed{0 = \nabla_t \dot{\gamma}(r) = Y_1'(r)} \qquad = 2 \cdot \sum_{i=2}^{d} \langle Y_i, Y_i' \rangle$$

- ~~Andererseits gilt~~: Wir wählen eine Basis $b_1, \dots, b_d$ von $T_m M$ mit

$$Y_i(s) = d(\exp_m)_{s \cdot \dot{\gamma}(0)}(s \cdot b_i) \quad i \geq 1 \quad (\text{also } b_1 = \dot{\gamma}(0))$$

siehe doCarmo Korollar 2.5. Anders aufgeschrieben

$$Y_i(s) = s \cdot \partial_i \quad \text{für Koordinatenf. } \partial_i = d(\exp_m)(b_i)$$

Beachte ferner: $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \langle Y_i, Y_j \rangle_{i,j \geq 2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

da γ nach Bogenlänge parametrisiert & $Y_i \perp \dot{\gamma}$ $\forall i \geq 2$, siehe doCarmo Korollar 3.8. (es ist möglich b_i so zu wählen, dass $Y_i \perp \dot{\gamma}$ gilt).

Sei $\tilde{Y} := (\langle Y_i, Y_j \rangle)_{i,j \geq 2}$.

- Damit

$G := (g_{ij})_{i,j \geq 1}$! $g(b_1, b_1) = 1$ da exp-Abb. radiale Isometrie (→ Lemma v. Gauß)

$$\sqrt{\det Y(s)} = \sqrt{\det \tilde{Y}(s)} \stackrel{\downarrow}{=} s^{n-1} \sqrt{\det G(s)} = \frac{s^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{\det G(s)}}{\sqrt{\det G(r)}} = \frac{s^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \frac{\theta(s)}{\theta(r)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\Big|_{s=r} \sqrt{\det Y} = \frac{(n-1)\, r^{n-2}}{r^{n-1}} \frac{\theta(r)}{\theta(r)} + \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}} \frac{\theta'(r)}{\theta(r)}$$

- Insgesamt:

$$\Delta f(n) = -\frac{d^2}{ds^2}\varphi(r) - \frac{d\varphi}{ds}(r) \sum_{i=2}^{d} \langle Y_i(r), Y_i'(r) \rangle$$

$$= -\frac{d^2}{ds^2}\varphi(r) - \frac{d\varphi}{ds}(r) \cdot \left(\frac{n-1}{r} + \frac{\theta'(r)}{\theta(r)} \right)$$

□